Leçon 157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Extrait du rapport de jury

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.
Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 157 intitulée : "Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.". Le but de cette leçon sera d'étudier ces matrices dans différents cadres afin d'en tirer le plus grand nombre d'informations et de nouveaux résultats possibles.
On commence tout d'abord avec une première partie où l'on donne les généralités en commençant par les définitions et les premières propriétés. On donne ainsi la définition d'une matrice symétrique et antisymétrique ainsi que quelques exemples et les dimensions des sous-espaces vectoriels associés. Dans un deuxième point on fait le lien avec les endomorphismes auto-adjoint en commençant par quelques rappels sur l'adjoint et la définition d'un opérateur auto-adjoint et on fait le lien avec les matrices symétriques. Dans un dernier point on fait le lien avec les formes quadratiques en définissant les formes bilinéaires et sesquilinéaires puis en enchaîne en faisant le lien entre une forme bilinéaire et sa matrice associée dans une base de l'espace et cela nous permet de définir la notion de rang.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à la réduction où l'on commence par la classification des formes quadratiques. On rappelle donc rapidement ce qu'est une forme quadratique et la forme polaire associée avant d'énoncer le théorème de réduction de Gauss qui nous sera très pratique pour classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ via le rang ainsi que sur $\mathbb{R}$ via la notion de signature qui suit et qui permet d'énoncer la loi d'inertie de Sylvester. On termine ce premier point par la classification des formes quadratiques sur un corps fini via la notion de discriminant. Dans un deuxième point on s'intéresse plus particulièrement au théorème spectral qui est un résultat assez puissant car il donne une condition suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable. On donne quelques lemmes préliminaires utiles à la démonstration puis on donne quelques corollaires remarquables comme par exemple les corollaires 37,41 et 42.
Finalement, on consacre une dernière partie à des applications en commençant par des homéomorphismes via la décomposition polaire (qui découle du lemme de la racine carrée) qui donne le théorème 47 ainsi que l'homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$. On s'intéresse ensuite à des factorisations de matrices avec la décomposition LU et de Cholesky qui sont très utilisées en analyse numérique pour résoudre certains systèmes d'équations linéaires. On s'intéresse ensuite aux matrices de Gram en commençant par en donner la définition avant de donner le théorème 54 qui est très utile dans certain cas pour calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie car on ramène un problème de minimisation à un calcul de déterminant. Enfin, on termine cette leçon par la recherche d'extrema en dimension finie via la matrice hessienne qui est symétrique grâce au théorème de Schwartz. On donne ainsi un critère pour trouver nos extrema ainsi que leurs natures puis un exemple.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère n un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

I Généralités

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Matrice (anti-)symétrique [Gourdon (1), p.240] :
On appelle **matrice symétrique** (resp. **matrice anti-symétrique**) toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^\intercal = M$ (resp. $M^\intercal = -M$) et on note alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques réelles).

Proposition 2 : [Gourdon (1), p.241]
On a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Définition 3 : Matrice hermitienne [Gourdon (1), p.241] :
On appelle **matrice hermitienne** toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = \overline{M}^\intercal$

Proposition 4 : [Gourdon (1), p.241]
On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 5 : [Gourdon (1), p.241]
L'ensemble des matrices hermitiennes forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2 mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel !

Exemple 6 : [Gourdon (1), p.241]
Les matrices suivantes sont respectivement symétrique, anti-symétrique et hermitienne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1,5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ -i & -2 & 5 \\ 5i & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

I.2 Lien avec les endomorphismes auto-adjoints

Dans toute cette sous-partie, on considère $(E, < \cdot ; \cdot >)$ un espace euclidien.

Théorème 7 : [Rombaldi, p.734]
Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$ on ait $< u(x); y > = < x; u^*(y) >$.

Définition 8 : Endomorphisme adjoint [Rombaldi, p.718] :
Avec les notations du théorème précédent, on appelle **adjoint de** u l'endomorphisme u^*.

Définition 9 : Endomorphisme auto-adjoint [Rombaldi, p.732] :
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un **endomorphisme auto-adjoint** lorsque $u = u^*$.

Théorème 10 : [Rombaldi, p.732]
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Corollaire 11 : [Rombaldi, p.733]
$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 12 : Matrice symétrique (définie) positive [Rombaldi, p.735] :
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice symétrique positive** (resp. **matrice symétrique définie positive**) lorsque A est symétrique et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $< Ax; x >\geq 0$ (resp. $< Ax; x >> 0$).

I.3 Lien avec les formes bilinéaires

Définition 13 : Forme bilinéaire [Gourdon (1), p.239] :
On considère E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que $\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ est une **forme bilinéaire** lorsque pour tout $x \in E$ (resp. $y \in F$) l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ (resp. $x \longmapsto \varphi(x, y)$) est linéaire.

Définition 14 : Forme sesquilinéaire [Gourdon (1), p.239] :
On considère E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
On dit que $\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ est une **forme sesquilinéaire** lorsque pour tout $x \in E$ (resp. $y \in F$) l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (resp. $x \longmapsto \varphi(x, y)$ est antilinéaire).

Exemple 15 : [Gourdon (1), p.239]
Le produit scalaire sur L^2 ou $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{C})$ est une forme sesquilinéaire.

Remarque 16 : [Gourdon (1), p.240]
$*$ Pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on a :

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = X^\intercal M Y$$

avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
$*$ On a alors qu'en dimension finie toute forme bilinéaire (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou sesquilinéaire ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est continue.

Proposition 17 : [Gourdon (1), p.241]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
L'application qui à une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire) associe sa matrice dans une base fixée de E est un isomorphisme. En particulier, l'ensemble des formes bilinéaires (ou sesquilinéaires) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2.

Définition 18 : Changement de base [Gourdon (1), p.240] :
On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **changement de base** l'écriture d'une matrice M dans une nouvelle base par $M' = P^\intercal M P$ avec P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On dit alors que les matrices M et M' sont des **matrices congrues**.

Définition 19 : Rang d'une forme bil./ses. [Gourdon (1), p.240] :
On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle **rang de** φ le rang de sa matrice dans n'importe quelle base de E.

Définition 20 : Forme bilinéaire (anti-)symétrique [Gourdon (1), p.240] :
On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que la forme bilinéaire $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) lorsque pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (resp. $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$).

Remarque 21 : [Gourdon (1), p.240]
On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
Une forme bilinéaire sur E est symétrique (resp. antisymétrique) si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (resp. antisymétrique).

II Réduction

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

II.1 Classification des formes quadratiques

Définition 22 : Forme quadratique [Gourdon (1), p.241] :
On appelle **forme quadratique sur** E toute application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x,x)$ avec φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

Proposition 23 : [Gourdon (1), p.241]
Soit q une forme quadratique sur E.
Il existe une unique forme bilinéaire symétrique telle que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle alors la **forme polaire** de q.

Remarque 24 :
On peut définir les formes hermitiennes dans le cas de $\mathbb{C}$ de manière analogue à ce que l'on a précédemment.

Théorème 25 : Théorème de réduction de Gauss (1) [Rombaldi, p.469] :
Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier $r \in [\![1;n]\!]$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \ell_j^2(x)$.

Exemple 26 : [Rombaldi, p.485]
$*$ On considère $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.
On a $q(x) = -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$.
$*$ On considère $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.
On a $q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)$.

Théorème 27 : [Rombaldi, p.476]
Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E on ait les égalités $s = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) > 0\})$ et $t = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) < 0\})$.
De plus, on a la relation $s + t = \mathrm{rg}(q)$.

Théorème 28 : Loi d'inertie de Sylvester [Rombaldi, p.477]
Si q est de signature (s,t), on a alors la décomposition $q = \sum_{j=1}^{s} \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes dans E^* et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D = \mathrm{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-s-t})$.

Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 29 : Critère de Sylvester [Rombaldi, p.478] :
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
A est définie positive si, et seulement si, tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

On sait que l'on peut classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ via le rang uniquement et on peut classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ via la signature. On peut également s'intéresser à la classification des formes quadratiques sur un corps fini :

Définition 30 : Discriminant d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.463] :
On considère φ un forme bilinéaire symétrique.
Le discriminant dans une base $\mathcal{B}$ de E de φ est le déterminant de la matrice de φ dans cette base et on le note $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)$.

Théorème 31 : [Rombaldi, p.480]
Si $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ est un non carré fixé et que φ est de rang $r \in [\![1;n]\!]$, alors il existe une base de E dans la quelle matrice de φ est de la forme $D = \mathrm{diag}(I_{r-1}, \delta, 0_{n-r})$ avec $\delta \in \{1;\alpha\}$.

Corollaire 32 : [Rombaldi, p.482]
$*$ Deux formes quadratiques non dégénérées q et q' sur E sont équivalentes si, et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, le rapport $\frac{\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q')}{\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)}$ est un carré dans $\mathbb{F}_q^*$.
$*$ Il y a dans l'espace vectoriel $Q(E)$ des formes quadratiques sur E, $2n+1$ classes d'équivalence, dont deux de formes quadratiques non dégénérées.

II.2 Théorème spectral et conséquence

Lemme 33 : [Rombaldi, p.734]
Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Lemme 34 : [Rombaldi, p.734]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si $n \geq 2$ et que λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Lemme 35 : [Rombaldi, p.734]
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.
Si $n \geq 2$ et que $e \in E$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ et de norme égale à 1, alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e)^\perp$ est stable par u et la restriction de u à H est symétrique.

Théorème 36 : Théorème spectral [Rombaldi, p.734] :
Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise en une base orthonormée.

Corollaire 37 : [Rombaldi, p.735]
Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée (autrement dit, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\intercal$).

Remarque 38 : [Rombaldi, p.735]
Le résultat n'est plus vrai pour les matrices symétriques complexes. En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique complexe mais sa seule valeur propre est 1 et pourtant $A \neq I_2$...

Proposition 39 : [Rombaldi, p.736]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont positives (resp. strictement positives).

Théorème 40 : [Rombaldi, p.739]
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E.
Il existe une base orthonormée commune de diagonalisation de E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, ces endomorphismes commutent deux à deux.

Corollaire 41 : [Rombaldi, p.739]
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices symétriques réelles de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée si, et seulement si, elles commutent deux à deux.

Corollaire 42 : [Rombaldi, p.736]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\intercal B$.

III Applications

III.1 Des homéomorphismes

Lemme 43 : Lemme de la racine carré [Rombaldi, p.739]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Remarque 44 : [Rombaldi, p.740]
Avec les notations du théorème, on dit que B est la **racine carrée positive de** $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Cette racine carrée positive est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 45 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.740] :
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 46 : [Rombaldi, p.741]
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Théorème 47 : [Rombaldi, p.741]
L'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Lemme 48 : [Rombaldi, p.654]
Pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $|||M|||_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$.

Développement 2 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 49 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

III.2 Factorisation de matrices

Définition 50 : Déterminants principaux [Rombaldi, p.690] :
On appelle **déterminants principaux de** A les déterminants des matrices principales $A_k = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Théorème 51 : Décomposition LU [Rombaldi, p.690] :
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors A admet une décomposition $A = LU$ (où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure) si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non nuls.
De plus, cette décomposition est unique lorsqu'elle existe.

Développement 3 : [B] [cf. ROMBALDI]

Théorème 52 : Décomposition de Cholesky [Rombaldi, p.691] :
Si A est une matrice symétrique réelle définie positive, alors il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifient $A = BB^\top$.

III.3 Matrice et déterminant de Gram

Dans toute cette sous-partie, on considère E un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel.

Définition 53 : Matrice de Gram [Gourdon (1), p.274] :
On considère $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E.
On appelle **matrice de Gram** la matrice $(< x_i; x_j >)^2_{(i,j)\in[\![1;n]\!]}$ et on note $G(x_1, ..., x_n)$ son déterminant.

Théorème 54 : [Gourdon (1), p.275]
Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension n muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$, alors pour tout $x \in E$, on a : $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1,...,e_n,x)}{G(e_1,...,e_n)}$.

Proposition 55 : [Gourdon (1), p.274]
Toute matrice de Gram est une matrice hermitienne positive et réciproquement, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram.
De plus, la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, ..., x_n$ est définie si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est libre.

Corollaire 56 : Inégalité d'Hadamard [Gourdon (1), p.273] :
$*$ Si $x_1, ..., x_n \in E$, alors $G(x_1, ..., x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.
$*$ Si $v_1, ..., v_n \in \mathbb{C}$, alors $|\det(v_1, ..., v_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|$.

Remarque 57 :
De plus, on a égalité si, et seulement si, la famille de vecteurs contient un vecteur nul ou est orthogonale. Ainsi, dans le cas d'un espace préhilbertien réel E, le volume d'un parallélotope P de E est égal au produit des longueurs de ses côtés si, et seulement si, P est un parallélotope droit.

III.4 Recherche d'extrema

Dans toute cette sous-partie, on considère E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert non vide de E, $f : E \longrightarrow F$ et a un élément de U.

Théorème 58 : Théorème de Schwarz [Gourdon (2), p.326] :
Si f est deux fois différentiable en a, alors on a :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

On suppose jusqu'à la fin de cette sous-partie que $F = \mathbb{R}$.

Définition 59 : Matrice hessienne en un point [Gourdon (2), p.336] :
On suppose que f est deux fois différentiable en a.
On appelle **matrice hessienne de f en a** la matrice définie par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 60 :
Par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Proposition 61 : [Gourdon (2), p.335]
Si f admet un extremum relatif en a et est différentiable en a, alors $df_a = 0$.

Remarque 62 :
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général. En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet une dérivée nulle en 0 mais il ne s'agit pas d'un extremum relatif.

Définition 63 : Point critique [Gourdon (2), p.336] :
On dit que a est un **point critique de** f lorsque f est différentiable en a et que $df_a = 0$.

Théorème 64 : [Gourdon (2), p.336]
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et que $df_a = 0$, alors :
$*$ Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors $H_f(a)$ est positive (resp. négative).
$*$ Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Exemple 65 : [Gourdon (2), p.337]
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ admet un point col en $(0, 0)$ et deux minimums absolus en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Remarques sur la leçon

— On peut également parler de vecteurs gaussiens, de classification des coniques ou donner quelques autres résultats topologiques.

— Il faut savoir faire des réductions de Gauss pour classifier une formes quadratique.

Liste des développements possibles

— Décomposition LU et de Cholesky.

— Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^+ + (\mathbb{C})$.

Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.